Grupul pentru Reformă şi Alternativă Universitară
Pagina web : www.graur.org Fondata în 2004 la Cluj Napoca. Nr.19643/2407/A/2004 din RN al ONG-urilor al Min. Justiţiei Romania, 400424 Cluj-Napoca // Dostoievski 26 E-mail: office@graur.org

Decizie de indexare a faptei de plagiat la poziția
00439 / 06.01.2020
şi pentru admitere la publicare în volum tipărit

care se bazează pe:

A. **Nota de constatare şi confirmare a indiciilor de plagiat** prin fişa suspiciunii inclusă în decizie.

Fişa suspiciunii de plagiat / Sheet of plagiarism's suspicion		
Incidența minimă a suspiciunii / Minimum incidence of suspicion		
OS	STOICA, Cristina Maria, ALEXA, Elena Lidia. *Cercetări de marketing. Teorie şi aplicaţii*. Bucureşti: C.H.Beck. 2010.	
OA	RATEAU, Patrick. Metodele şi statisticile experimentale în ştiinţele umane. Iaşi: Polirom. 2004.	
P.01	p.166 – p.169	p.140 – p.144
P.02	p.169 – p.170	p.145 – p.146
P.03	p.170 – p.174	p.147 – p.150
P.04	p.173 – p.174	p.150 – p.152
P.05	p.174 – p.175	p.152 – p.153
P.06	p.189 – p.190	p.154 – p.157
P.07	p.192 – p.194	p.158 – p.162
P.08	p.194 – p.197	p.163 – p.167
P.09	p.198 – p.201	p.167 – p.172
P.10	p.201 – p.203	p.172 – p.175
Fişa întocmită pentru includerea suspiciunii în Indexul Operelor Plagiate în România de la Sheet drawn up for including the suspicion in the Index of Plagiarized Works in Romania at www.plagiate.ro		

Notă: Prin „p.72:00" se înţelege paragraful care se termină la finele pag.72. Notaţia „p.00:00" semnifică până la ultima pagină a capitolului curent, în întregime de la punctul iniţial al preluării.

Note: By „p.72:00" one understands the text ending with the end of the page 72. By „p.00:00" one understands the taking over from the initial point till the last page of the current chapter, entirely.

B. **Fişa de argumentare a calificării** de plagiat alăturată, fişă care la rândul său este parte a deciziei.

Echipa Indexului Operelor Plagiate în România

Argumentarea calificării faptei de plagiat

Nr. crt.	Descrierea situației care este încadrată drept plagiat	Se confirmă
1.	Preluarea identică a unor pasaje dintr-o operă autentică publicată, fără precizarea întinderii şi menționarea provenienței şi însuşirea acestora într-o lucrare ulterioară celei autentice.	✓
2.	Preluarea identică a unor pasaje dintr-o operă autentică publicată, care sunt rezumate ale unor opere anterioare operei autentice, fără precizarea întinderii şi menționarea provenienței şi însuşirea acestora într-o lucrare ulterioară celei autentice.	
3.	Preluarea identică a unor figuri dintr-o operă autentică publicată, fără menționarea provenienței şi însuşirea acestora într-o lucrare ulterioară celei autentice.	
4.	Preluarea identică a unor poze dintr-o operă autentică publicată, fără menționarea provenienței şi însuşirea acestora într-o lucrare ulterioară celei autentice.	
5.	Preluarea identică a unor tabele dintr-o operă autentică publicată, fără menționarea provenienței şi însuşirea acestora într-o lucrare ulterioară celei autentice.	✓
6.	Republicarea unei opere anterior publicate, prin includerea unui nou autor fără contribuție explicită în lista de autori	
7.	Republicarea unei opere anterior publicate, prin excluderea unui autor din lista inițială de autori.	
8.	Preluarea identică de pasaje dintr-o operă autentică publicată, fără precizarea întinderii şi menționarea provenienței, fără nici o intervenție care să justifice exemplificarea sau critica prin aportul creator al autorului care preia şi însuşirea acestora într-o lucrare ulterioară celei autentice.	✓
9.	Preluarea identică de figuri sau reprezentări grafice dintr-o operă autentică publicată, fără menționarea provenienței, fără nici o intervenție care să justifice exemplificarea sau critica prin aportul creator al autorului care preia şi însuşirea acestora într-o lucrare ulterioară celei autentice.	
10.	Preluarea identică de tabele dintr-o operă autentică publicată, fără menționarea provenienței, fără nici o intervenție care să justifice exemplificarea sau critica prin aportul creator al autorului care preia şi însuşirea acestora într-o lucrare ulterioară celei autentice.	✓

Actualizat la 1 decembrie 2019.

Notă: Prin „proveniență" se înțelege informația din care se pot identifica cel puțin numele autorului / autorilor, titlul operei, anul apariției.

Constatarea faptei istorice de plagiat adică fapta de plagiat care se referă la scrieri care au fost deja aduse la cunoştința publicului este posibilă când sunt îndeplinite simultan cerințele ca:

a. Condiția de preluare neconformă prin care, în scrierea plagiată, se pot identifica fragmente care nu sunt delimitate în mod explicit şi pentru care nu există nici o indicație explicită a provenienței ca referință bibliografică.

b. Există o însuşire explicită prin care fragmentul preluat apare într-o altă scriere, dată publicității ulterior scrierii autentice, sub numele unei persoane care o revendică în mod implicit ca fiind a sa şi/sau că este publicată pentru prima oară.

Psihologie

Patrick Rateau

METODELE ȘI STATISTICILE EXPERIMENTALE

în ştiinţele umane

Collegium

POLIROM

Seria *Psihologie* este coordonată de Adrian Neculau.

Patrick Rateau este psihosociolog, conferențiar doctor în psihologie socială la Universitatea Paul Valéry – Montpellier III. Este coautor a două lucrări, *Introduction à l'étude des représentations sociales* (împreună cu Michel-Louis Rouquette) (Presses Universitaires de Grenoble, 1998) și *Représentations sociales : pratique des études de terrain* (împreună cu Pascal Moliner și Valérie Cohen-Scali) (Presses Universitaires de Rennes, 2002), și autor a numeroase capitole de lucrări și articole în reviste științifice. Cercetările lui sunt consacrate reprezentărilor sociale, gândirii sociale și memoriei colective.

www.polirom.ro

Patrick Rateau, *Méthode et statistique expérimentales en sciences humaines*, Ellipses Édition Marketing S.A., Paris, 2001

Editura POLIROM
Iași, B-dul Carol I nr. 4, P.O. Box 266, 700506
București, B-dul I.C. Brătianu nr. 6, et. 7, ap. 33; O.P. 37;
P.O. Box 1-728, 030174

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României:

RATEAU, PATRICK

Metodele și statisticile experimentale în științele umane /
Patrick Rateau; trad. de Andreea Gruev-Vintilă. – Iași: Polirom, 2004.
280 p.; 20 cm – (Collegium. Psihologie)
Bibliogr.

ISBN: 973-681-485-8

I. Gruev-Vintilă, Andreea (trad.)

311

Printed in ROMANIA

311
303

Statistica

V

Științe sociale - Metodologie
Științe umane - Metodologie

P.01

3.6. Compararea frecvenţelor

3.6.1. *Noţiunea de frecvenţă*

Se numeşte frecvenţă (sau proporţie) a unei clase dintr-o populaţie sau dintr-un eşantion raportul între efectivul clasei şi efectivul total al populaţiei sau al eşantionului.

Fie un eşantion de mărime n şi o clasă i a acestui eşantion cu efectivul n_i. Se numeşte p_i frecvenţa clasei i dată de $p_i = n_i/n$. De exemplu, fie un eşantion de $n = 100$ de studenţi dintre care numărăm câţi fac parte din clasa i „studenţi salariaţi". Să presupunem că $n_i = 25$. Frecvenţa p_i a studenţilor salariaţi este deci $p_i = 25/100 = 25\% = 0{,}25$.

Toţi cercetătorii în ştiinţe umane trebuie să manipuleze observaţii exprimate sub formă de frecvenţe, adesea procentaje. Ca şi în cazul mediilor, este deci important să dispunem de teste statistice prin care să putem compara frecvenţele. În acest caz putem folosi două tehnici. Prima se bazează pe o perspectivă parametrică şi este aceeaşi cu cea folosită la compararea mediilor. Ea are însă două limite : permite compararea a două frecvenţe, şi numai a două, şi poate fi aplicată doar dacă dispunem de eşantioane de mărime mare, care să asigure normalitatea distribuţiei în proporţia populaţiei de origine. Acestei prime tehnici i se preferă în general o a doua, care evită ambele inconveniente şi nu necesită ajustarea la legea normală (este deci o tehnică bazată pe o perspectivă neparametrică) – de aceea poate fi folosită şi pe efective reduse. În plus, permite compararea mai multor frecvenţe între ele. Ea este cea pe care o vom prezenta aici.

3.6.2. *Testul Hi-doi (χ^2) : principiul general*

Testul Hi-doi (sau Hi-pătrat) face posibilă măsurarea distanţei între una sau mai multe repartiţii de efective observate şi respectiva sau respectivele repartiţii redistribuite conform unui model probabilist. Comparaţiile se efectuează deci asupra efectivelor distribuţiilor de comparat, şi nu direct asupra frecvenţelor. Întrucât este vorba despre repartiţii de efective, trebuie ca datele să fie plasate în categorii. Aşadar testul este preconizat în cazul datelor provenite din scale nominale şi ordinale.

Dacă datele au fost culese cu o scală de intervale, atunci intervalul de variaţie al distribuţiei trebuie transformat în clase.

Formula de calcul a lui χ^2 este :

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{Efectivul observat} - \text{Efectivul teoretic})^2}{\text{Efectivul teoretic}}$$

Se observă că acest indicator se referă la efective, şi nu la proporţii. Se observă, de asemenea, că ridicarea la pătrat a numărătorului interzice pentru χ^2 valorile negative. Cu alte cuvinte, testul Hi-doi este un test direcţional (*cf.* secţiunea 3.4 din acest capitol).

Ca întotdeauna, respingerea sau păstrarea ipotezei nule depinde simultan de situaţia lui χ^2 calculat faţă de χ^2 critic (mai mic, egal sau superior lui) dat de tabelul Hi-doi, de gradul de eroare fixat şi numărul de grade de libertate, diferit în funcţie de folosirea testului.

- Dacă χ^2 calculat este inferior lui χ^2 critic, ipoteza nulă se păstrează. Diferenţa între cele două frecvenţe nu este semnificativă.
- Dacă χ^2 calculat este mai mare sau egal cu χ^2 critic, ipoteza nulă se respinge. Diferenţa între cele două frecvenţe este semnificativă.

Citirea tabelului Hi-doi

Să presupunem că vrem să găsim valoarea critică a lui Hi-doi asociată unui gdl = 4, la pragul de încredere de 1%. Se obţine :

Prag \ gdl	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01 ↓	0.001	0.0001	0.00001
1								
...								
4 →					13.28			
...								

3.6.3. *Compararea unei frecvenţe şi a unei norme : χ^2 de ajustare*

Aici trebuie studiat dacă o distribuţie de efective observate poate sau nu poate fi considerată echivalentă cu o distribuţie teoretică reconstruită. Reconstrucţia se poate face fie prin echirepartiţia efectivelor modalităţilor variabilei studiate, fie plecând de la informaţii cunoscute despre repartiţia modalităţilor acestei variabile. Trebuie înţeles că procedura de calcul nu se schimbă, ci variază numai modul de reconstruire a distribuţiei efectivelor teoretice, în funcţie de informaţiile de care dispunem.

Cazul echirepartiţiei efectivelor teoretice

Echirepartiţia efectivelor teoretice înseamnă că fiecare modalitate a variabilei studiate are teoretic aceeaşi probabilitate de apariţie ca şi celelalte modalităţi. Fie, de exemplu, cazul celor două feţe ale unei monede. Să presupunem că un individ care joacă „cap sau pajură" obţine, după 100 de aruncări consecutive, de 41 de ori cap şi de 59 de ori pajură. Se ştie că fiecare dintre feţele monedei are, teoretic, o şansă din două să cadă la fiecare aruncare. La 100 de aruncări consecutive, repartiţia teoretică a capului şi pajurei este : de 50 de ori cap şi de 50 de ori pajură. Se pune acum întrebarea dacă diferenţele între efectivele observate (41 ; 59) şi efectivele teoretice (50 ; 50) sunt suficient de mari ca să putem reţine intervenţia unei variabile oarecare în timpul aruncărilor (o monedă trucată, o abilitate specială a jucătorului, o greşeală în notarea frecvenţelor...).

Diferenţa se calculează cu formula lui χ^2 :

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{Efectiv observat} - \text{Efectiv teoretic})^2}{\text{Efectiv teoretic}} = \frac{(41-50)^2}{50} + \frac{(59-50)^2}{50} = 3{,}24$$

Nu ne rămâne decât să comparăm acest χ^2 cu χ^2 critic dat de tabel la gradul de libertate corespunzător. În cazul comparării unei frecvenţe şi a unei norme, gdl = (numărul de modalităţi ale variabilei – 1), adică, aici : 2 – 1 = 1. La riscul de eroare de 5% (0,05), χ^2 critic = 3,84. χ^2 calculat este deci inferior lui χ^2 critic. Se concluzionează că nu există o diferenţă semnificativă între distribuţia observată a aruncărilor şi distribuţia lor teoretică. Diferenţa observată se datorează deci fluctuaţiilor întâmplătoare.

Să trecem acum la exerciţii legate mai direct de ştiinţele umane.

Aplicaţie

Directorul unei fabrici de jucării vrea să afle dacă, în general, copiii sunt mai atraşi de jucăriile din pluş în formă de iepuraş, broască-ţestoasă sau elefant. El lansează un studiu în care cele trei jucării sunt prezentate unui număr de 54 de copii de 2 ani. Rezultatele sunt următoarele : 10 aleg iepuraşul, 23 broasca-ţestoasă şi 21 elefantul. Se poate trage concluzia, cu un risc de eroare de 5%, că există o alegere preferenţială din partea copiilor ?

În ipoteza independenţei stricte a tipului de animal şi a alegerii copiilor, ar trebui să avem următoarea repartiţie teoretică : 54/3 = 18 copii care aleg iepuraşul, 54/3 = 18 copii care aleg broasca-ţestoasă şi 54/3 = 18 copii care aleg elefantul.

Se compară apoi distribuţia observată (10 ; 23 ; 21) cu distribuţia teoretică (18 ; 18 ; 18) cu ajutorul χ^2.

$$\chi^2 = \frac{(10-18)^2}{18} + \frac{(23-18)^2}{18} + \frac{(21-18)^2}{18} = 5{,}45$$

La gradul de libertate gdl = 3 - 1 = 2, χ^2 critic dat de tabel, la pragul de 5% (0.05), este de 5,99. χ^2 calculat este inferior acestei valori. Nu există deci un efect al tipului de animal asupra alegerii făcute de copii, întrucât distribuţia alegerilor este, din punct de vedere statistic, echivalentă cu echirepartiţia. Diferenţele observate rezultă deci din fluctuaţiile de eşantionare.

Plecând de la acest exemplu, se observă că testul χ^2 de ajustare permite concluzii globale asupra repartiţiei efectivelor fiecărei modalităţi a unei variabile. Absenţa unei diferenţe globale nu înseamnă însă neapărat că toate modalităţile sunt echivalente. Chiar acesta este cazul aici, fiindcă se „vede" bine că alegerile iepuraşului sunt inferioare celor ale celorlalte două jucării. La fel, există cazuri în care se poate concluziona asupra unei diferenţe semnificative în vreme ce toate modalităţile nu sunt diferite. Când numărul de modalităţi creşte, repartiţia trebuie adesea analizată mai precis, cu ajutorul analizelor două câte două.

În exemplul nostru, se obţin rezultatele următoare:

- *Comparaţia iepuraş/broască-ţestoasă*
  - Efective observate: 10; 23; Efective teoretice: 16,5; 16,5
  - $\chi^2 = \frac{(10-16,5)^2}{16,5} + \frac{(23-16,5)^2}{16,5} = 5,12$
  - gdl = 2 - 1 = 1. χ^2 critic = 3,84 la riscul de eroare de 5%
  - Diferenţa este semnificativă, copiii au preferat broasca-ţestoasă iepuraşului.
- *Comparaţia iepuraş/elefant*
  - Efective observate: 10; 21; Efective teoretice: 15,5; 15,5
  - $\chi^2 = \frac{(10-15,5)^2}{15,5} + \frac{(21-15,5)^2}{15,5} = 3,90$
  - gdl = 2 - 1 = 1. χ^2 critic = 3,84 la riscul de eroare de 5%
  - Diferenţa este semnificativă, copiii au preferat elefantul iepuraşului.
- *Comparaţia broască-ţestoasă/elefant*
  - Efective observate: 23; 21; Efective teoretice: 22; 22
  - $\chi^2 = \frac{(23-22)^2}{22} + \frac{(21-22)^2}{22} = 0,09$
  - gdl = 2 - 1 = 1. χ^2 critic= 3,84 la riscul de eroare de 5%
  - Diferenţa nu este semnificativă, copiii au ales atât elefantul, cât şi broasca-ţestoasă.

Cu alte cuvinte, deşi nu există o diferenţă statistică globală între cele trei jucării, analiza două câte două ne spune că alegerea copiilor s-a îndreptat semnificativ mai puţin asupra iepuraşului decât asupra celorlalte două animale. Directorul fabricii de jucării ar trebui deci să limiteze producţia de iepuraşi!

Exerciţiul 19

Un paleontolog compară trei şantiere de săpături aflate în trei zone geografice diferite. Vrea să ştie dacă unul dintre şantiere are mai multe oseminte de cerb decât celelalte. În acest scop, numără osemintele de cerb descoperite în fiecare şantier: şantierul A: 34; şantierul B: 44; şantierul C: 42. Ce concluzie poate trage?

Cazul repartiției efectivelor teoretice independente

Spre deosebire de cazul precedent, fiecare modalitate a variabilei prezintă aici o probabilitate teoretică de apariție independentă de alte modalități. Cu alte cuvinte, unele modalități au o probabilitate de apariție mai mare sau mai mică decât altele. Ne aflăm în cazul în care dispunem deja de frecvențele teoretice ale modalităților unui fenomen (statisticile demografice, sociale, ale unei populații etc.). Această metodă permite compararea eșantioanelor în raport cu date deja cunoscute, așa cum este adesea cazul în științele umane.

Testul statistic este strict același ca în cazul precedent. Diferența ține pur și simplu de faptul că distribuția teoretică nu poate fi obținută aici împărțind efectivul la numărul de modalități ale variabilei. Într-adevăr, partea respectivă a fiecărei modalități nu este constantă. Trebuie deci reconstituită distribuția efectivelor teoretice, ținând cont de diferențele proporțiilor. Dacă datele cunoscute sunt exprimate în procente, așa cum este adesea cazul, se aplică o regulă de trei simplă:

$$\text{Efectivul teoretic} = \frac{(\text{Efectivul total al eșantionului}) \times (\%\ \text{modalității})}{100}$$

Astfel, se convertește distribuția teoretică pentru a face compatibilă scala ei cu cea a distribuției observate.

Aplicație

Un studiu asupra populației afirmă că 30% dintre locuitorii orașului Marsilia vorbesc engleza, 20% spaniola, 5% germana și 45% nici una dintre aceste limbi. Ce putem spune despre această afirmație dacă știm că, dintr-un eșantion de 400 de marsiliezi interogați, 100 au declarat că vorbesc engleza, 100 spaniola și 30 germana ?

Aici se compară frecvența observată cu o normă dată de rezultatele anchetei. Efectivele observate sunt recoltate de la 400 de persoane, în timp ce rezultatele anchetei se exprimă în procente. Pentru a le putea compara, cele două distribuții trebuie aduse la scara celor 400 de persoane din eșantion. Se obține:

Limba	Efective observate	Efective teoretice
Engleză	100	$\frac{400 \times 30}{100} = 120$
Spaniolă	100	$\frac{400 \times 20}{100} = 80$
Germană	30	$\frac{400 \times 5}{100} = 20$
Alta	170	$\frac{400 \times 45}{100} = 180$

Rămâne de aplicat formula convenţională pentru χ^2:

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{Efectiv observat} - \text{Efectiv teoretic})^2}{\text{Efectiv teoretic}}$$

Adică :

$$\chi^2 = \frac{(100-120)^2}{120} + \frac{(100-80)^2}{80} + \frac{(30-20)^2}{20} + \frac{(170-180)^2}{180} = 13{,}88$$

La pragul de 0.05 şi gradul de libertate gdl = 4 - 1 = 3, χ^2 critic dat de tabel este 7,82. χ^2 calculat este deci superior acestei valori şi îi rămâne superior atât la pragul de 0.02, cât şi la pragul de 0.01. Se poate afirma aşadar, cu un risc de eroare de 1%, că între distribuţia observată şi distribuţia livrată de anchetă există o diferenţă semnificativă. Cu alte cuvinte, se trage concluzia fie că afirmaţia anchetei este imperfectă, fie că eşantionul considerat nu este reprezentativ pentru populaţie.

Exerciţiul 20

Un lingvist este interesat de evoluţia limbilor în decursul secolelor. Pentru unul dintre studiile sale, vrea să afle dacă frecvenţa vocalelor într-un text francez din secolul al XIX-lea este aceeaşi cu cea din franceza contemporană. Se ştie că frecvenţa teoretică a vocalelor în franceză este : a = 6/16 ; e = 4/16 ; i = 4/16 ; o = 1/16 ; u = 1/16. Textul studiat are 320 de vocale, dintre care 146 a, 70 e, 60 i, 14 o şi 30 u. Se poate trage concluzia că distribuţia vocalelor din text este aceeaşi cu cea din franceza actuală ?

P.03

3.6.4. *Compararea mai multor frecvenţe : χ^2 de independenţă*

Testul χ^2 poate fi folosit pentru evaluarea diferenţelor între două sau mai multe variabile. În acest caz, el se numeşte χ^2 de independenţă, întrucât permite evaluarea gradului de independenţă care există între modalităţile încrucişate ale variabilelor aflate în joc.

Frecvenţele calculate pe eşantioane independente

Se studiază aici legătura între mai multe variabile cu statut diferit, ale căror modalităţi respective sunt încrucişate. Încrucişarea variabilelor se reprezintă în general printr-un tabel încrucişat, numit şi de contingenţă.

Aplicaţie

Într-o anchetă asupra timpului liber, un tânăr cercetător vrea să ştie dacă există vreo legătură între sex şi modul de petrecere a timpului liber. În cursul studiului, întreabă atât femei, cât şi bărbaţi dacă preferă să meargă la cinema sau la teatru. Iată răspunsurile, sub forma unui tabel de contingenţă :

	Teatru	**Cinema**	**$\sum$ linii**
Bărbaţi	45	55	**100**
Femei	58	44	**102**
$\sum$ coloane	**103**	**99**	**N = 202**

Se ştie că testul χ^2 face posibilă măsurarea distanţei între o distribuţie observată şi distribuţia teoretică reconstruită. Or, aici, repartiţia efectivelor teoretice trebuie efectuată plecând de la ceea ce s-a observat, şi nu pe baza echirepartiţiei sau a proporţiilor cunoscute în prealabil. Informaţia esenţială pentru determinarea distribuţiei efectivelor teoretice se găseşte în totalul marginal al liniilor şi coloanelor din tabelul de contingenţă, adică în aşa-numitele efective marginale. Se observă, pe de o parte, că există o diferenţă globală la nivelul modului de petrecere a timpului liber : se pare că teatrul este mai des selecţionat decât cinematograful. Pe de altă parte însă, se observă că studentul care a făcut ancheta nu s-a adresat aceluiaşi număr de bărbaţi şi de femei. Există deci un dezechilibru în efectivele observate, care trebuie păstrat în calculul efectivelor teoretice. Iată metoda: pentru fiecare căsuţă din tabel se efectuează produsul sumei liniilor şi al sumei coloanelor la intersecţia cărora se află căsuţa, iar rezultatul se împarte la efectivul total. Cu alte cuvinte, determinarea efectivului teoretic al fiecărei căsuţe din tabel se efectuează cu formula următoare:

$$\frac{\text{Efectivul marginal pe linie al căsuţei} \times \text{Efectivul marginal pe coloană al căsuţei}}{\text{Efectivul total}}$$

În exemplul nostru, se obţin următoarele efective teoretice:

	Teatru	**Cinema**
Bărbaţi	$\frac{100 \times 103}{202} = 50,99$	$\frac{100 \times 99}{202} = 49,00$
Femei	$\frac{102 \times 103}{202} = 52,00$	$\frac{102 \times 99}{202} = 49,99$

Rămâne de aplicat formula convenţională pentru χ^2:

$$\chi^2 = \frac{(45-50,99)^2}{50,99} + \frac{(55-49)^2}{49} + \frac{(58-52)^2}{52} + \frac{(44-49,99)^2}{49,99} = 2,84$$

Pentru interpretare, χ^2 calculat trebuie comparat cu χ^2 critic dat de tabel. În acest scop trebuie calculate gradele de libertate. Datorită încrucişării celor două variabile, se încrucişează şi gradele lor de libertate. Altfel spus, gdl = (numărul de modalităţi al primei variabile −1) × × (numărul de modalităţi al celei de-a doua variabile − 1).

Sau, generalizând potrivit tabelului de contingenţă:

gdl = (numărul de coloane − 1) × (numărul de linii − 1)

Aici, gdl = [(2 − 1) × (2 − 1)] = 1. La pragul de eroare de 5% (0.05), χ^2 critic = 3,84. χ^2 calculat fiind inferior acestei valori, suntem obligaţi să păstrăm ipoteza nulă şi să concluzionăm că între cele două variabile există o relaţie de independenţă. Tânărul cercetător nu poate afirma că răspunsurile bărbaţilor diferă semnificativ de cele ale femeilor. Diferenţele observate pot fi atribuite unor simple fluctuaţii de eşantionare.

Aplicaţie

Directorul unei întreprinderi de produse lactate a cerut unei agenţii de publicitate să propună un nume nou pentru un iaurt degresat care se va lansa pe piaţă. În acest scop, agenţia îi chestionează direct pe consumatorii potenţiali, propunându-le să aleagă un nume dintre patru posibile, după ce au gustat din iaurt. Fiindcă produsul vizează cu predilecţie clientela feminină, agenţia testează omogenitatea preferinţelor asupra numelui în funcţie de clasa de vârstă. Pe un eşantion de 550 de femei se definesc trei clase de vârstă.

	Alaitgé	Bonlait	Fruit'n'ligne	Douceur
25-35 ani	28	13	36	84
35-50 ani	47	21	52	103
peste 50 ani	32	18	47	69

În prima etapă, se determină efectivele marginale pe linie şi pe coloană :

	Alaitgé	Bonlait	Fruit'n'ligne	Douceur	$\sum$ linii
25-35 ani	28	13	36	84	**161**
35-50 ani	47	21	52	103	**223**
peste 50 ani	32	18	47	69	**166**
$\sum$ **coloane**	**107**	**52**	**135**	**256**	**550**

Se determină apoi efectivele teoretice, aplicând pentru fiecare căsuţă formula următoare :

$$\frac{\text{Efectivul marginal pe linie al căsuţei} \times \text{Efectivul marginal pe coloană al căsuţei}}{\text{Efectivul total}}$$

Rezultatele sunt prezentate în tabelul de mai jos :

	Alaitgé	Bonlait	Fruit'n'ligne	Douceur	$\sum$ linii
25-35 ani	31,32	15,22	39,52	74,94	**161**
35-50 ani	43,39	21,08	54,74	103,79	**223**
peste 50 ani	32,29	15,70	40,74	77,27	**166**
$\sum$ **coloane**	**107**	**52**	**135**	**256**	**550**

Nu rămâne de calculat decât χ^2, măsurând pentru fiecare căsuţă din tabel distanţa între efectivele observate şi efectivele teoretice.

$$\chi^2 = \frac{(28-31{,}32)^2}{31{,}32} + \frac{(13-15{,}22)^2}{15{,}22} + \frac{(36-39{,}52)^2}{39{,}52} + \frac{(84-74{,}94)^2}{74{,}94} +$$
$$+ \frac{(47-43{,}39)^2}{43{,}39} + \frac{(21-21{,}08)^2}{21{,}08} + \frac{(52-54{,}74)^2}{54{,}74} + \frac{(103-103{,}79)^2}{103{,}79} +$$
$$+ \frac{(32-32{,}29)^2}{32{,}29} + \frac{(18-15{,}70)^2}{15{,}70} + \frac{(47-40{,}74)^2}{40{,}74} + \frac{(69-77{,}27)^2}{77{,}27} = 4{,}71$$

La gradul de libertate gdl = $[(4-1) \times (3-1)] = 6$, tabelul ne dă, cu un risc de 5%, un χ^2 critic de 12,59. χ^2 calculat fiind inferior acestei valori, suntem obligaţi să păstrăm ipoteza nulă. Preferinţele pentru cele patru nume sunt independente de clasa de vârstă. Altfel spus, în general femeile întrebate au arătat aceleaşi preferinţe.

Exerciţiul 21

Un psiholog al muncii face un studiu asupra condiţiilor de muncă într-o uzină de metalurgie. Vrea să compare condiţiile de lucru ale muncitorilor care lucrează la bandă cu cele ale muncitorilor din atelier. Unul dintre indicatorii aleşi este numărul de accidente de muncă. Într-o aceeaşi perioadă obţine rezultatele următoare:

- lucru la bandă: 70 de accidente la 121 de muncitori
- lucru în atelier: 30 de accidente la 82 de muncitori.

Depinde numărul de accidente de locul de muncă?

P.04

Frecvenţele calculate pe eşantioane perechi

Dacă două variabile identice sunt supuse aceloraşi subiecţi, avem de-a face cu un caz de împerechere (două sarcini similare supuse aceloraşi indivizi, două momente de evaluare distincte cu acelaşi instrument de măsură...). Scopul este aici compararea perechilor de modalităţi divergente, şi numai a acestora, pentru a evita repetiţiile. În acest scop, se foloseşte o formulă care nu verifică decât distanţa între perechile divergente. *Atenţie însă*: acest test, numit χ^2 al lui Mac Nemar, nu poate fi aplicat decât în cazul încrucişării a două variabile cu două modalităţi (tabel de contingenţă 2×2). În celelalte cazuri se foloseşte formula tradiţională pentru χ^2, ştiind că împerecherea nu se ia în considerare. Este aşadar de preferat să se recurgă la descompuneri (mai multe teste succesive) sau la regruparea modalităţilor.

Fie următorul tabel de contingenţă :

		Variabila 1	
		Modalitatea 1	Modalitatea 2
Variabila 2	Modalitatea 1	A	B
	Modalitatea 2	C	D

Scopul lui χ^2 al lui Mac Nemar este evaluarea distanţei între perechile divergente, deci pentru calcularea lui χ^2 se iau în considerare numai aceste perechi. Referindu-ne la căsuţele tabelului de mai sus, se obţine :

$$\chi^2 \text{ Mac Nemar} = \frac{(B-C)^2}{B+C}$$

Valoarea obţinută se compară cu cea din tabelul χ^2 la gradul de libertate gdl = (2 – 1)(2 – 1) = 1 :

- Dacă χ^2 calculat este inferior lui χ^2 critic, ipoteza nulă se păstrează. Diferenţa între cele două frecvenţe nu este semnificativă.
- Dacă χ^2 calculat este mai mare sau egal cu χ^2 critic, ipoteza nulă se respinge. Diferenţa între cele două frecvenţe este semnificativă.

Aplicaţie

Într-un studiu de docimologie se analizează rezultatele la admiterile de la Politehnică şi de la Facultatea de Litere. Nu se iau în considerare decât rezultatele celor 300 de candidaţi care s-au prezentat la ambele admiteri : 60 au fost admişi numai la Facultatea de Litere, 44 numai la Politehnică şi 16 la amândouă. Se poate trage concluzia că ambele examene sunt la fel de dificile ?

În primul rând, trebuie reconstituit tabelul de contingenţă :

		Politehnică	
		Admis	Respins
Facultatea de Litere	Admis	16	60
	Respins	44	180

Se înţelege uşor că este inutil să comparăm candidaţii admişi la ambele examene cu cei respinşi la ambele. Singura comparaţie care ne interesează este cea între candidaţii admişi la Facultatea de Litere şi cei respinşi la Politehnică sau cea între candidaţii admişi la Politehnică şi cei respinşi la Facultatea de Litere. Aplicarea χ^2 lui Mac Nemar ne dă rezultatul :

$$\chi^2 \text{ Mac Nemar} = \frac{(60-44)^2}{60+44} = \frac{256}{104} = 2{,}46$$

La gradul de libertate gdl = (2 - 1)(2 - 1) = 1, tabelul ne dă, cu un risc de 5%, un χ^2 critic de 3,84. χ^2 calculat fiind inferior acestei valori, suntem obligaţi să păstrăm ipoteza nulă. Cu alte cuvinte, ambele examene sunt la fel de dificile.

Exerciţiul 22

Un grup de subiecţi efectuează două exerciţii de statistică. Evaluarea fiecărui exerciţiu se face sub forma admis-respins. Rezultatele sunt următoarele :

		Exerciţiul 1	
		Admis	Respins
Exerciţiul 2	Admis	20	34
	Respins	12	36

Vrem să aflăm dacă unul dintre exerciţii este mai dificil decât celălalt.

p.05

3.6.5. *Limitele folosirii şi interpretării testului* χ^2

Necesitatea unui număr minim de observaţii

Valoarea lui χ^2 depinde mult de numărul de observaţii efectuate. Dacă numărul este mic, riscă să falsifice valoarea reală a distanţei între efectivele observate şi efectivele teoretice. Acest test nu este deci aplicabil când unul dintre efectivele teoretice este mai mic decât 1. În plus, trebuie ca efectivele tuturor căsuţelor din tabelul de contingenţă să fie mai mari sau egale cu 5. În caz contrar, creşte riscul de a mări artificial valoarea lui χ^2 calculat şi putem ajunge la concluzii greşite.

Corecțiile aduse testului

Dacă unul dintre efectivele observate este mai mic decât 10, în formula χ^2 trebuie introdusă o corecție : corecția lui Yates.

– În cazul eșantioanelor independente, formula corectată este :

$$\chi^2 \text{ corectat} = \sum \frac{\left[\,|\text{ Efectivul observat} - \text{Efectivul teoretic }| - 0{,}5\right]^2}{\text{Efectivul teoretic}}$$

– În cazul eșantioanelor perechi, χ^2 al lui Mac Nemar corectat este :

$$\chi^2 \text{ Mac Nemar corectat} = \sum \frac{|\,B - C\,| - 1}{B + C}$$

Limitele interpretării testului χ^2

Testul nu este eficient atunci când vrem să analizăm variabile cu număr mare de modalități : cu cât numărul de încrucișări ale modalității crește, cu atât interpretarea este mai dificilă. În cazul unui tabel de contingență cu un număr foarte mare de căsuțe, avem la dispoziție două soluții : fie reunim modalitățile sau facem comparații descompuse pe perechi, care au dezavantajul că reduc informația sau multiplică ipotezele, fie recurgem la tehnici de analiză mai complexe, care, pentru a fi prezentate, ar necesita o întreagă lucrare (de exemplu, analiza factorială a corespondențelor).

3.7. Corelațiile

3.7.1. *Noțiuni recapitulative*

Noțiunea de corelație a fost abordată în partea de metodologie a acestei lucrări (capitolul 1, secțiunea 2.4). Să ne reamintim însă că scopul studierii corelației este analiza forței legăturii care unește două serii de date. Dacă această relație este perfectă, se numește legătură funcțională, iar cunoașterea valorii ei face posibilă prognozarea cu certitudine a valorii unei alte variabile. Dacă această relație este nulă, atunci valoarea unei variabile nu face posibilă prognozarea valorii alteia. Se spune că avem de-a face cu o dispersie întâmplătoare.

Calculul unui coeficient de corelaţie permite măsurarea gradului de relaţie între cele două serii de date şi ne spune dacă această relaţie tinde către dispersie întâmplătoare sau către o legătură funcţională. Acest coeficient face însă posibilă şi estimarea sensului respectivei legături. Dacă relaţia este pozitivă, creşterea valorilor unei variabile este asociată creşterii valorilor celeilalte variabile. Dacă relaţia este negativă, creşterea valorilor unei variabile este asociată scăderii valorilor celeilalte variabile.

Astfel, coeficientul de corelaţie variază întotdeauna de la -1 la $+1$. Semnul indică sensul relaţiei (pozitivă sau negativă), iar valoarea exprimă gradul de relaţie între cele două variabile ($|1|$ = legătură funcţională ; 0 = dispersie întâmplătoare).

Dispunem de două tipuri de teste de corelaţie în funcţie de natura scalelor folosite la culegerea datelor : testul de corelaţie lineară (sau testul Bravais-Pearson) şi testele de corelaţie pe ranguri (dintre care vom prezenta aici două, cele mai obişnuite : testul de corelaţie Spearman şi coeficientul de concordanţă Kendall, abordate în capitolul 4).

p.06

3.7.2. *Testul de corelaţie lineară sau testul Bravais-Pearson*

Folosirea acestui test se face cu următoarele condiţii :

- datele trebuie să provină din scale de intervale sau de raport ;
- legătura între distribuţii trebuie să fie tendenţial lineară.

Dacă ambele condiţii sunt simultan reunite, se poate aplica testul coeficientului de corelaţie Bravais-Pearson (notat cu *r*), a cărui formulă este următoarea :

$$r = \frac{\sum\left[(\text{Valorile eşant. 1} - \text{Media eşant. 1}) \times (\text{Valorile eşant. 2} - \text{Media eşant. 2})\right]}{\sqrt{\sum(\text{Valorile eşant. 1} - \text{Media eşant. 1})^2 \times \sum(\text{Valorile eşant. 2} - \text{Media eşant. 2})^2}}$$

Valoarea calculată pentru *r* se interpretează în comparaţie cu *r* critic dat de tabelul legii *r* al lui Bravais-Pearson la gradul de libertate egal cu (numărul de cupluri $-$ 2) :

- dacă *r* calculat $<$ *r* critic, ipoteza nulităţii corelaţiei se păstrează. Între cele două variabile nu există corelaţie ;
- dacă *r* calculat $\geq$ *r* critic, ipoteza nulă se respinge. Cele două variabile sunt corelate. În acest caz, trebuie să ne raportăm la semnul lui *r* calculat pentru a determina sensul corelaţiei, pozitiv sau negativ.

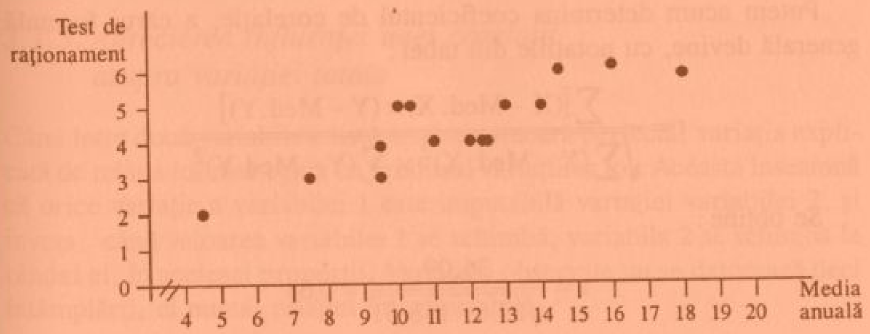
Aplicaţie

Un psiholog şcolar vrea să afle dacă există o legătură între capacitatea de raţionament a liceenilor şi performanţele lor şcolare. În acest scop, administrează un test de raţionament (notat de la 0 la 10) unui eşantion de 15 elevi şi studiază eventuala legătură între scorurile obţinute şi mediile generale anuale ale acestor elevi.

Elevi	Nota la test	Media generală
1	6	18
2	2	4,5
3	5	13
4	4	9,5
5	4	12,25
6	6	16
7	5	14
8	3	7,5
9	4	12,5
10	5	10
11	3	9,5
12	4	12
13	6	14,5
14	4	11
15	5	10,25

Psihologul se întreabă dacă, la riscul de 5%, poate admite ipoteza corelaţiei între cele două variabile măsurate.

Cele două distribuţii rezultă din scale de intervale. Mai mult, reprezentarea grafică arată că relaţia între cele două variabile este tendenţial lineară :



P.07

Capitolul 4

Testele neparametrice

4.1. Introducere

Majoritatea testelor statistice precedente cer ca distribuţiile să fie normale. Când însă nu este cazul, se preferă structuri mai puţin rigide ale scalelor de măsură şi se aplică un test neparametric. Principala problemă a acestor teste este pierderea informaţiei : se lucrează pe ranguri sau semne, şi nu pe datele brute. Deşi sunt adesea desconsiderate în ştiinţele umane, majoritatea acestor teste sunt robuste şi fiabile. Vom examina succesiv mai multe teste neparametrice adaptate tipului de organizare a datelor culese, şi în special caracterului independent sau pereche al măsurătorilor. Pentru fiecare caz vom prezenta două teste, dintre care al doilea este întotdeauna cel mai eficient, dar nu întotdeauna realizabil.

4.2. Compararea a două eşantioane independente

4.2.1. *Testul medianei*

Când poate fi folosit ?

- Când datele s-au prelevat cu ajutorul unei scale de intervale, însă distribuţia lor nu este normală. În acest caz, studierea mediilor distribuţiilor nu are sens. Preferăm să studiem mediana lor. De exemplu, când analizăm relaţia între sexul elevilor şi performanţele lor şcolare, se poate întâmpla ca un număr de „supradotaţi" cu note de 20/20 să influenţeze exagerat media generală şi abaterea standard. Poate fi deci mai pertinent să luăm în considerare performanţele numai ca fiind inferioare sau superioare medianei generale a clasei.
- Când datele s-au prelevat cu ajutorul unei scale ordinale.

Demers

- Se reunesc valorile celor două eşantioane e1 şi e2 pentru a constitui un nou eşantion E de mărime N = n1 + n2.
- Se calculează mediana noului eşantion E.
- Se repartizează valorile lui e1 şi e2 în funcţie de poziţia lor faţă de mediană ; pe de o parte, valorile inferioare medianei, iar de cealaltă parte, valorile superioare medianei.
- Se constituie tabelul de contingenţă încrucişând în linie eşantioanele şi în coloană cele două modalităţi ale variabilei recodate. Se obţine astfel un tabel de tipul următor :

	< mediana	**> mediana**	**$\sum$ linii**
e1	n1	n2	n1 + n2
e2	n3	n4	n3 + n4
$\sum$ coloane	**n1 + n3**	**n2 + n4**	**Total**

Ipoteza nulă pe care o vom testa este următoarea : „Frecvenţa valorilor superioare medianei în e1 este egală cu frecvenţa valorilor superioare medianei în e2". Fie H0 = $\frac{n2}{n1+n2} - \frac{n4}{n3+n4} = 0$

Se constată că am ajuns asftel la compararea a două frecvenţe calculate pe eşantioane independente, şi se aplică deci testul Hi-doi (*cf.* capitolul 3, secţiunea 3.6.4) :

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{Efectivul observat} - \text{Efectivul teoretic})^2}{\text{Efectivul teoretic}}$$

Se ştie că informaţia esenţială pentru determinarea distribuţiei efectivelor teoretice se află în totalurile marginale ale liniilor şi coloanelor din tabelul de contingenţă, adică în aşa-numitele efective marginale. Metoda de calcul al efectivelor teoretice constă, pentru fiecare căsuţă din tabel, în efectuarea produsului sumei liniilor şi al sumei coloanelor la intersecţia cărora se află căsuţa, iar produsul se împarte la efectivul total. Cu alte cuvinte, determinarea efectivului teoretic al fiecărei căsuţe din tabel se obţine cu formula :

$$\frac{\text{Efectiv marginal pe linie al căsuței} \times \text{Efectiv marginal pe coloană al căsuței}}{\text{Efectiv total}}$$

Hotărârea de respingere sau de păstrare a ipotezei nule depinde simultan de faptul că χ^2 calculat este mai mic, egal sau mai mare decât χ^2 critic dat de tabel (a cărui citire este explicată în capitolul 3, secțiunea 3.6.2), de pragul de eroare fixat și de numărul de grade de libertate, care aici este gdl = (2 - 1)(2 - 1) = 1.

Astfel, la pragul de eroare definit :

- dacă χ^2 calculat este inferior lui χ^2 critic, ipoteza nulă se păstrează. Diferența între cele două frecvențe nu este semnificativă ;
- dacă χ^2 calculat este mai mare sau egal cu χ^2 critic, ipoteza nulă se respinge. Diferența între cele două frecvențe este semnificativă.

Dacă unul dintre efectivele observate este mai mic decât 10, trebuie aplicată și corecția lui Yates :

$$\chi^2 \text{ corectat} = \sum \frac{[\,|\text{Efectiv observat} - \text{Efectiv teoretic}| - 0{,}5\,]^2}{\text{Efectiv teoretic}}$$

Observație. În cazul în care avem valori egale cu mediana, se construiesc două tabele de contingență :

	≤ mediana	> mediana
e1		
e2		

	< mediana	≥ mediana
e1		
e2		

Se calculează Hi-doi pe tabelul în care riscul de eroare este cel mai mic, știind că Hi-doi este cu atât mai mic cu cât diferența între $\frac{n2}{n1 + n2}$ și $\frac{n4}{n3 + n4}$ este mai mică.

Aplicaţie

Un profesor emite ipoteza că reuşita la un examen diferă în funcţie de tipul examenului (oral sau scris) impus studenţilor lui, în număr de 102. Mediana notelor se situează la 10,5 şi împarte efectivul în două părţi de 48 şi 54 de studenţi.

Încrucişăm cele două variabile într-un tabel de contingenţă:

	Valori < 10,5	Valori > 10,5	$\sum$ linii
Scris	18	33	**51**
Oral	30	21	**51**
$\sum$ **coloane**	**48**	**54**	**102**

Pentru determinarea efectivelor teoretice se aplică pentru fiecare căsuţă formula:

$$\frac{\text{Efectiv marginal pe linie al căsuţei} \times \text{Efectiv marginal pe coloană al căsuţei}}{\text{Efectivul total}}$$

Rezultatele se află în următorul tabel:

	Valori < 10,5	Valori > 10,5
Scris	24	27
Oral	24	27

Calculăm acum χ^2:

$$\chi^2 = \frac{(18-24)^2}{24} + \frac{(33-27)^2}{27} + \frac{(30-24)^2}{24} + \frac{(21-27)^2}{27} = 5{,}66$$

La gradul de libertate gdl = 1, tabelul ne dă, cu un risc de 5%, un χ^2 critic de 3,84. χ^2 calculat este superior acestei valori, deci respingem ipoteza nulă. Tipul de examen a avut într-adevăr un efect. Tabelul de contingenţă arată că studenţii cu note mai mari decât mediana generală sunt semnificativ mai numeroşi în condiţia „examen scris" decât în celelalte.

Exercițiul 24

Elevii din două clase de a XII-a dau un test. Rezultatele sunt următoarele :

Clasa 1	8	8	8	8	9	9	9	10	10	10
Clasa 2	8	9	10	10	10	11	11	11	11	12

Clasa 1	10	11	11	12	12	13	14	15	16	16
'Clasa 2	12	12	13	13	13	13	14	15	16	16

Întrebarea este dacă rezultatele la test sunt omogene, știind că cele două distribuții nu sunt normalizate.

4.2.2. *Testul „U" Mann-Whitney*

P.08

Când poate fi folosit ?

- Când datele s-au prelevat cu ajutorul unei scale de intervale, însă distribuția lor nu este normală. În acest caz, studierea mediilor distribuțiilor nu are sens. Preferăm să studiem mediana lor. De exemplu, când analizăm relația între sexul elevilor și performanțele lor școlare, se poate întâmpla ca doi „supradotați" cu note de 20/20 să influențeze exagerat media generală și abaterea standard. În schimb, dacă notele se transformă în ranguri, cei doi vor fi clasați primul și al doilea și nu se ia în considerare distanța față de nota celui de-al treilea.
- Când datele se prezintă sub forma unui clasament.

Demers

- Se reunesc valorile celor două eșantioane e1 și e2 pentru a constitui un nou eșantion E de mărime N = n1 + n2.
- Se atribuie un rang fiecărei valori. Transformarea în rang a valorilor *ex aequo* (egale între ele) se efectuează astfel. Dacă patru indivizi sunt clasați toți în poziția a treia, nu li se atribuie rangul 3 tuturor. Se consideră că, dacă nu ar fi avut exact aceeași notă, ar fi ocupat rangurile 3, 4, 5 și 6. Li se atribuie deci rangul mediu corespunzător, adică (3 + 4 + 5 + 6) / 4 = 4,5.
- În eșantioanele inițiale se înlocuiește fiecare valoare prin rangul ei.
- Pentru fiecare eșantion, se calculează suma rangurilor : T1 pentru eșantionul e1 și T2 pentru eșantionul e2.

- Ipoteza nulă testată este aceea potrivit căreia suma rangurilor eşantionului 1 este egală cu suma rangurilor eşantionului 2, adică $H0 = T1 - T2 = 0$. Putem avea două situaţii:
  a) n1 şi/sau n2 sunt mai mici sau egale cu 20. În acest caz, Mann şi Whitney au construit un tabel al valorilor T. T este suma rangurilor eşantionului cu efectivul cel mai mic. Tabelul ne dă în linie n1 (adică mărimea posibilă a lui e1, acesta fiind întotdeauna eşantionul cu efectivul cel mai mic), iar în coloană n2 (adică mărimea posibilă a lui e2, adică eşantionul cu efectivul cel mai mare). În corpul tabelului se obţin limitele între care trebuie să fie cuprins T pentru ca H0 să fie acceptată.
  b) n1 şi/sau n2 sunt mai mari decât 20. Atunci trebuie calculată:

$$U1 = (n1n2) + \left[\frac{n1(n1+1)}{2}\right] - T1$$

şi

$$U2 = (n1n2) + \left[\frac{n2(n2+1)}{2}\right] - T2$$

Se păstrează valoarea cea mai mică dintre cei doi indici. Acest indice se distribuie aproximativ după o lege normală de medie şi abatere standard:

$$m_U = \frac{n1n2}{2} \text{ şi } \sigma_U = \sqrt{\frac{n1n2(n1+n2+1)}{12}}$$

Indicele U se poate transforma aşadar în variabilă normală centrată şi redusă cu formula: $z = \frac{x-m}{\sigma}$, care devine

$$z = \frac{U1 \text{ sau } U2 - \frac{n1n2}{2}}{\sqrt{\frac{n1n2(n1+n2+1)}{12}}}$$

Pentru interpretarea acestei valori ne raportăm la tabelul legii normale centrate şi reduse (pentru prezentarea legii normale, a legii normale centrate şi reduse şi a procedurii de citire a tabelului, vezi capitolul 2, secţiunile 2.2 şi următoarele) :

- dacă frecvenţa calculată este mai mare decât 0.05, se estimează că riscul de eroare este prea mare pentru a respinge H0. Se consideră deci că T1 - T2 = 0, adică cele două eşantioane nu diferă semnificativ ;
- dacă frecvenţa calculată este mai mică sau egală cu 0.05, H0 se respinge şi se consideră că cele două eşantioane diferă semnificativ.

Aplicaţie

Un profesor emite ipoteza că există diferenţe în reuşita la un examen în funcţie de tipul examenului (parţiale, notate G1, sau examen final, notat G2) impus celor 100 de studenţi ai lui. Efectivele obţinute pentru fiecare tip de examen sunt :

Note	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Efectiv G1	0	2	3	7	2	5	1	4	3	5	10	2	1	5
Efectiv G2	3	1	1	7	7	11	3	5	3	2	4	0	1	2

Începem cu reunirea efectivelor celor două grupuri :

Note	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Efectiv G1+ Efectiv G2	3	3	4	14	9	16	4	9	6	7	14	2	2	7

Se atribuie un rang fiecărei valori în funcţie de efectivul ei :

Nota	Rang
5	2
6	5
7	8,5
8	17,5
9	29
10	41,5
11	51,5
12	58

Nota	Rang
13	65,5
14	72
15	82,5
16	90,5
17	92,5
18	97

Ne întoarcem la grupurile iniţiale şi înlocuim fiecare valoare cu rangul ei :

Efectiv × Rang (G1)	Efectiv × Rang (G2)
0 × 2	3 × 2
2 × 5	1 × 5
3 × 8,5	1 × 8,5
7 × 17,5	7 × 17,5
2 × 29	7 × 29
5 × 41,5	11 × 41,5
1 × 51,5	3 × 51,5
4 × 58	5 × 58
3 × 65,5	3 × 65,5
5 × 72	2 × 72
10 × 82,5	4 × 82,5
2 × 90,5	0 × 90,5
1 × 92,5	1 × 92,5
5 × 97	2 × 97

Suma rangurilor pentru fiecare grup :
T1 = 2847 şi T2 = 2203
n1 şi n2 fiind mai mari decât 20, se calculează U1 şi U2 :

$$U1 = (50 \times 50) + \left[\frac{50(50+1)}{2}\right] - 2847 = 928$$

$$U2 = (50 \times 50) + \left[\frac{50(50+1)}{2} \right] - 2203 = 1572$$

Pentru a-l calcula pe z, se păstrează cea mai mică valoare dintre ele, adică U2 :

$$z = \frac{928 - \frac{(50 \times 50)}{2}}{\sqrt{\frac{(50 \times 50)(50+50+1)}{12}}} = -2,22$$

Tabelul legii normale centrate şi reduse indică, pentru $z = 2,22$, frecvenţa de 0.02642, care este mai mică decât 0.05. Putem deci respinge H0 şi considera că tipul de examen are efect asupra rezultatelor. Comparând suma rangurilor celor două grupuri, se constată că parţialele sunt mai benefice pentru studenţi (suma rangurilor este mai mare).

Exerciţiul 25

Reluaţi datele din exerciţiul precedent (exerciţiul 24) şi aplicaţi testul „U" Mann şi Whitney.

4.3. Compararea a *k* eşantioane independente ($k > 2$)

4.3.1. *Testul medianei generalizate*

Când poate fi folosit ?

- Când datele s-au prelevat cu ajutorul unei scale de intervale, însă distribuţia lor nu este normală. În acest caz, studierea mediilor distribuţiilor nu are sens. Preferăm să studiem mediana lor generală. De exemplu, dacă analizăm relaţia între categoria socio-profesională a taţilor elevilor şi performanţele şcolare ale acestora, se poate ca doi „supradotaţi" să aibă numai nota 20/20 şi să influenţeze exagerat media şi abaterea standard. Este mai pertinent să luăm în considerare numai performanţele inferioare sau superioare medianei generale a elevilor.
- Când datele s-au prelevat pe o scală ordinală.

Aplicaţie

Un profesor de istoria artei se întreabă dacă există o legătură între specializarea pe care o aleg 40 de studenţi de anul III (în artă modernă, contemporană, medievală sau antică) şi rezultatele lor la cursurile obligatorii comune. Notele obţinute la cursurile obligatorii comune sunt :

- *studenţii la artă modernă : 15, 8, 14, 10, 10, 12, 11, 13, 14, 9 ;*
- *studenţii la artă contemporană : 9, 10, 11, 13, 13, 13, 12, 15, 8, 8 ;*
- *studenţii la artă medievală : 8, 9, 9, 12, 12, 12, 13, 14, 15, 15 ;*
- *studenţii la artă antică : 9, 10, 16, 13, 13, 13, 12, 15, 8, 9.*

Eşantioanele sunt independente, iar distribuţia lor respectivă nu urmează legea normală. Se foloseşte deci testul medianei generalizate. În acest scop, se reunesc întâi valorile celor 4 grupuri şi se calculează mediana noului eşantion E :

Valori	Efectiv	Efectiv cumulat crescător	Efectiv cumulat descrescător
8	5	5	40
9	6	11	35
10	4	15	29
11	2	17	25
12	6	23	23
13	8	31	17
14	3	34	9
15	5	39	6
16	1	40	1

Pentru efectivele cumulate crescătoare, $N/2 = 20$ se situează între poziţiile 17 şi 23, adică între valorile 11 şi 12 . Deci : $11 + (1 \times 3)/7 = 11{,}42$.

Pentru efectivele cumulate descrescătoare, 20 se situează între poziţiile 17 şi 23, adică între valorile 13 şi 12. Deci : $13 - (1 \times 3)/7 = 12{,}57$.

Aşadar mediana distribuţiei este : $(11{,}42 + 12{,}57)/2 = 11{,}99$.

Se repartizează valorile celor 4 eşantioane de o parte şi de cealaltă a acestei mediane :

	< 11,99	> 11,99	∑ linii
Artă modernă	5	5	10
Artă contemporană	5	5	10
Artă medievală	3	7	10
Artă antică	4	6	10
∑ coloane	**17**	**23**	**40**

Efectivele teoretice, determinate cu ajutorul formulei convenţionale, sunt :

	< 11,99	> 11,99
Artă modernă	4,25	5,75
Artă contemporană	4,25	5,75
Artă medievală	4,25	5,75
Artă antică	4,25	5,75

Rămâne de calculat χ^2. Efectivele fiind însă mai mici decât 10, trebuie aplicată corecţia lui Yates.

$$\chi^2 = \frac{(|5-4{,}25|-0{,}5)^2}{4{,}25} + \frac{(|5-5{,}75|-0{,}5)^2}{5{,}75} + \frac{(|5-4{,}25|-0{,}5)^2}{4{,}25} +$$

$$+ \frac{(|5-5{,}75|-0{,}5)^2}{5{,}75} + \frac{(|3-4{,}25|-0{,}5)^2}{4{,}25} + \frac{(|7-5{,}75|-0{,}5)^2}{5{,}75} +$$

$$+ \frac{(|4-4{,}25|-0{,}5)^2}{4{,}25} + \frac{(|6-5{,}75|-0{,}5)^2}{5{,}75} = 0{,}30$$

La gradul de libertate (2 – 1)(4 – 1) = 3, tabelul Hi-doi ne dă, la pragul de 0.05, un χ^2 critic de 7,82, cu mult superior valorii lui χ^2 calculat. Se trage concluzia că eşantioanele sunt echivalente şi că, prin urmare, nu există o legătură între specializarea aleasă şi rezultatele studenţilor la cursurile obligatorii comune.

Exercițiul 26

Un director de supermarket se întreabă dacă există o legătură între vârsta casierelor şi aptitudinea lor de a citi cifrele. În acest scop, administrează un test de discriminare a cifrelor unui număr de 4 eşantioane de casiere de diferite clase de vârstă. Distribuţiile notelor nefiind normale, a calculat mediana generală (10,75), care împarte 47 şi 53 de casiere astfel:

	< 10,75	> 10,75	∑ linii
21-30 ani	20	15	**35**
31-40 ani	12	18	**30**
41-50 ani	12	10	**22**
51-60 ani	3	10	**13**
∑ coloane	**47**	**53**	**100**

4.3.2. *Testul Kruskal-Wallis*

P.10

Când poate fi folosit ?

- Când datele s-au prelevat cu ajutorul unei scale de intervale, însă distribuţia lor nu este normală. În acest caz, studierea mediilor distribuţiilor nu are sens. De exemplu, dacă analizăm relaţia între categoria socio-profesională a taţilor elevilor şi performanţele şcolare ale acestora, se poate ca doi „supradotaţi" să aibă numai nota 20/20 şi să influenţeze exagerat media şi abaterea standard. În schimb, dacă notele se transformă în ranguri, cei doi vor fi clasaţi primul şi al doilea şi nu se ia în considerare distanţa faţă de nota celui de-al treilea.
- Când datele se prezintă sub forma unui clasament.

Demers

- Se reunesc valorile celor două eşantioane e1 şi e2 şi se constituie un nou eşantion E de mărime N = n1 + n2 +...+ nk.
- Se atribuie un rang fiecărei valori. Transformarea în rang a valorilor *ex aequo* (egale între ele) se efectuează astfel. Dacă patru indivizi sunt clasaţi toţi în poziţia a treia, nu li se atribuie rangul 3 tuturor. Se consideră că, dacă nu ar fi avut exact aceeaşi notă, ar fi ocupat rangurile 3, 4, 5 şi 6. Li se atribuie deci rangul mediu corespunzător, adică (3 + 4 + 5 + 6) / 4 = 4,5.

- În eşantioanele iniţiale, se înlocuieşte fiecare valoare prin rangul ei.
- Pentru fiecare eşantion, se calculează suma rangurilor Tj.
- Ipoteza nulă testată este aceea potrivit căreia suma rangurilor eşantionului 1 este egală cu suma rangurilor eşantionului 2, adică H0 = T1 = T2 = ... = Tk. Pentru a testa această ipoteză, Kruskal şi Wallis au definit variabila H astfel încât :

$$H = \left(\frac{12}{N(N+1)} \times \sum \frac{Tj}{nj} \right) - 3(N+1)$$

12 şi 3 sunt constante
N = efectivul total
nj = efectivul unui eşantion oarecare
Tj = suma rangurilor unui eşantion oarecare
H se interpretează diferit în funcţie de două cazuri :

a) $k = 3$ şi toate nj ≤ 5
Se foloseşte atunci tabelul H al lui Kruskal şi Wallis în a cărui primă coloană găsim mărimea fiecărui eşantion, în a treia coloană - pragul de probabilitate, iar în a doua coloană - valorile critice ale lui H peste care se respinge ipoteza nulă. Astfel :
- dacă H calculat ≥ H critic, se păstrează ipoteza nulă, ceea ce înseamnă că, la pragul de încredere considerat, clasamentele diferă semnificativ ;
- dacă H calculat < H critic, se păstrează ipoteza nulă, ceea ce înseamnă că nu putem considera clasamentele statistic diferite.

b) $k > 3$ şi/sau unul dintre nj > 5
În acest caz, indicele H urmează aproximativ legea Hi-doi. Va fi deci interpretat cu ajutorul tabelului Hi-doi (procedura de citire prezentată în capitolul 3, secţiunea 3.6.2), în funcţie de pragul de probabilitate ales şi de gradul de libertate gdl = k - 1 :
- dacă H calculat ≥ χ^2 critic, se respinge ipoteza nulă, ceea ce înseamnă că clasamentele diferă semnificativ ;
- dacă H calculat < χ^2 critic, se păstrează ipoteza nulă, ceea ce înseamnă că nu putem considera clasamentele statistic diferite.

Aplicație

Se reia aplicația precedentă în care un profesor de istoria artei se întreabă dacă există o legătură între specializarea pe care o aleg 40 de studenți de anul III (în artă modernă, contemporană, medievală sau antică) și rezultatele lor la cursurile obligatorii comune. Notele obținute la cursurile obligatorii comune sunt :

- *studenții la artă modernă : 15, 8, 14, 10, 10, 12, 11, 13, 14, 9 ;*
- *studenții la artă contemporană : 9, 10, 11, 13, 13, 13, 12, 15, 8, 8 ;*
- *studenții la artă medievală : 8, 9, 9, 12, 12, 12, 13, 14, 15, 15 ;*
- *studenții la artă antică : 9, 10, 16, 13, 13, 13, 12, 15, 8, 9.*

Se reunesc valorile celor 4 eșantioane și se distribuie fiecăreia un rang în funcție de efectiv :

Valori	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Efectiv	5	6	4	2	6	8	3	5	1
Rang	3	8,5	13,5	16,5	20,5	27	33	37	40

Ne raportăm apoi la eșantioanele inițiale și înlocuim fiecare valoare cu rangul ei. Calculăm apoi suma rangurilor fiecărui eșantion.

Artă modernă	Artă contemporană	Artă medievală	Artă antică
3	3	3	3
8,5	3	8,5	8,5
13,5	8,5	8,5	8,5
13,5	13,5	20,5	13,5
16,5	16,5	20,5	20,5
20,5	20,5	20,5	27,5
27,5	27,5	27,5	27,5
33	27,5	33	27,5
33	27,5	37	37
37	37	37	40
T1 = 206	T2 = 184,5	T3 = 216	T4 = 213,5

Pentru a aplica formula lui H a lui Kruskal şi Wallis, trebuie calculată $\sum \frac{Tj^2}{nj}$.

$$\sum \frac{Tj^2}{nj} = \frac{206^2}{10} + \frac{184{,}5^2}{10} + \frac{216^2}{10} + \frac{213{,}5^2}{10} = 16871{,}45$$

Se aplică apoi formula lui H:

$$H = \left(\frac{12}{40 \times 41} \times 16871{,}45 \right) - (3 \times 41) = 0{,}44$$

Ne aflăm în cazul în care $k > 3$ şi în care toate eşantioanele au un efectiv peste 5. H se interpretează deci cu ajutorul tabelului Hi-doi, la gradul de libertate gdl = (4 – 1) = 3. La pragul de 0.05, Hi-doi critic = 7,82. H calculat fiind inferior acestei valori, ipoteza nulă se păstrează şi tragem concluzia că nu există o legătură statistică între specializarea aleasă şi rezultatele studenţilor la cursurile obligatorii comune.

Exerciţiul 27

Un psiholog şcolar vrea să studieze influenţa nivelului şcolar al mamelor unor liceeni asupra frecvenţei vizitelor făcute conducerii şcolii. Pentru anul şcolar 1998-1999, obţine următoarele rezultate:

Nivelul şcolar	Numărul de vizite al fiecărei mame
Patru clase	4, 3, 0, 7, 1, 2, 0, 3, 5, 1
Opt clase	2, 4, 1, 6, 3, 0, 2, 5, 1, 2, 1
Zece clase	2, 0, 4, 3, 8, 0, 5, 2, 1, 7, 6, 5, 1
Bacalaureat	9, 4, 2, 3
Studii superioare	2, 4, 5, 2, 2, 6